

# XXI

## МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

10 КЛАСС  
ВАРИАНТ 1

1. Для шифрования сообщения использовалось устройство из трёх последовательно зацепленных шестерёнок с 5, 30 и 6 зубцами (рис.1). На зубцах первой шестерёнки записаны цифры от 1 до 5, а на третьей – от 1 до 6. На второй шестерёнке также по часовой стрелке записан тридцатибуквенный алфавит: **АБВГДЕЖЗИКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЬЪЭЮЯ**. Для каждой шестерёнки выделено окошко (на рис.1 оно изображено квадратиком), в котором видна лишь одна буква или цифра. Сообщение шифровалось побуквенно: вторая шестерёнка вращалась по часовой стрелке, пока в окошке не появится первая буква сообщения. Затем выписывалась пара цифр, открывшихся в окошках первой и третьей шестерёнок. Далее продолжали вращать вторую шестерёнку до появления второй буквы сообщения, выписывали пару цифр из окошек и т. д. Так для случая, приведенного на рис.1, буква **Б** заменяется парой **52** (подчеркнем, что рисунок лишь поясняет принцип работы устройства, и на самом деле букве **Б** может соответствовать другая пара цифр). Начальное взаимное расположение шестерёнок неизвестно. Найдите по известным выписанным парам цифр

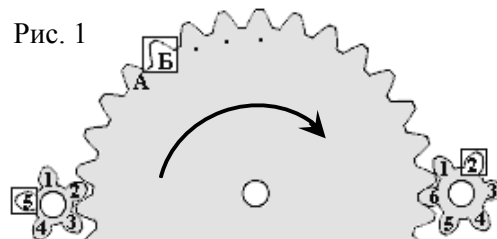


Рис. 1

какое сообщение было зашифровано (пробелы в тексте сохранены).

43 33 55 11 11 31 42 24 32 45 56 13 44 31  
55 16 23 55 22 15 56 33 56 15

2. Милла и Стелла разговаривают по телефону и хотят выбрать секретное число так, чтобы оно осталось неизвестным постороннему, возможно подслушивающему разговор. Для этого Милла подбирает натуральное число  $a \leq 256$  такое, что числа  $r_{257}(a^i)$  – различны при всех  $1 \leq i \leq 256$  и  $r_{257}(a^{256})=1$ , где  $r_{257}(t)$  – остаток от деления числа  $t$  на 257. Затем Милла загадывает натуральное число  $x \leq 256$ , а Стелла – натуральное число  $y \leq 256$ . После этого Милла сообщает числа  $a$  и  $r_{257}(a^x)$  Стелле, а Стелла ей – число  $r_{257}(a^y)$ . Теперь они обе вычисляют их секретное число  $r_{257}(a^{xy})$ . Найдите его, если известно, что  $a=6$ ,  $r_{257}(a^x)=4$ ,  $r_{257}(a^y)=251$ .

3. Для шифрования SMS-сообщений использовался следующий способ. Первоначально каждый пробел в исходном сообщении заменялся некоторым трёхбуквенным словом. Затем полученная цепочка букв набиралась на клавиатуре с использованием интеллектуального ввода (по типу T9). При этом при вводе каждой буквы осуществлялась лишь однократное нажатие соответствующей клавиши (рис.2), а программа интеллектуального ввода выбирала слово из словаря по следующему принципу: 1-я буква слова выбиралась с 1-й нажатой клавиши, 2-я – со второй и т. д. Полученные таким образом осмысленные слова разделялись запятыми и передавались. Найдите исходное сообщение, соответствующее написанному на экране (рис.2).

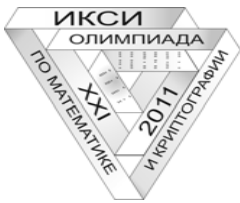


Рис. 2

4. Когда число городов в Криптоландии достигло  $5^4$ , власти решили провести территориальную реформу, создав 5 провинций по  $5^3$  городов в каждой. В качестве названий городам планировалось присвоить различные обозначения  $(a_1, \dots, a_4)$  – наборы из 4-х целых чисел, в которых  $a_i$  принимают значения от 0 до 4. При этом обозначения каждой пары городов из одной провинции должны были отличаться не менее чем в двух позициях. Укажите какой-либо способ построения такой системы названий.

5. Для шифрования передаваемых сообщений Катя и Юра используют следующий способ. Юра заранее выбрал набор коэффициентов  $(4, 6, 13, 25)$ , натуральное число  $u$  и сообщил их Кате. Для шифрования сообщения  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , состоящего из нулей и единиц, Катя вычисляет сумму  $S = 4x_1 + 6x_2 + 13x_3 + 25x_4$ , а затем находит остаток  $S'$  от деления произведения  $Su$  на 49 и отправляет  $S'$  Юре. Помогите Юре расшифровать сообщение  $S'=47$ , то есть найти соответствующую ему строку  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , если известно, что остаток от деления числа  $13u$  на 49 равен 1.

6. В треугольнике ABC известно:  $BC=2$ ,  $AC=2$ , угол ACB равен  $60^\circ$ . Точки M и K удовлетворяют условиям:  $AM : MC = 1:2$ ,  $BK : CK = 1:2$ . Найдите максимально возможное расстояние между точками M и K.



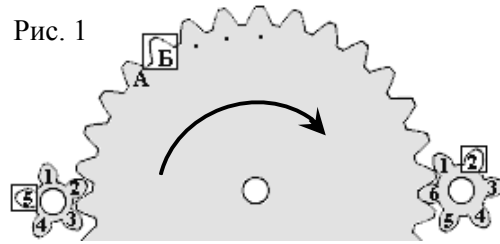
# XXI

## МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

10 КЛАСС  
ВАРИАНТ 2

1. Для шифрования сообщения использовалось устройство из трёх последовательно зацепленных шестерёнок с 5, 30 и 6 зубцами (рис.1). На зубцах первой шестерёнки записаны цифры от 1 до 5, а на третьей – от 1 до 6. На второй шестерёнке также по часовой стрелке записан тридцатибуквенный алфавит: **АБВГДЕЖЗИКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЬЪЭЮЯ**.

Рис. 1



Для каждой шестерёнки выделено окошко (на рис.1 оно изображено квадратиком), в котором видна лишь одна буква или цифра. Сообщение шифровалось побуквенно: вторая шестерёнка вращалась по часовой стрелке, пока в окошке не появится первая буква сообщения. Затем выписывалась пара цифр, открывшихся в окошках первой и третьей шестерёнок. Далее продолжали вращать вторую шестерёнку до появления второй буквы сообщения, выписывали пару цифр из окошек и т. д. Так для случая, приведенного на рис.1, буква **Б** заменяется парой **52** (подчеркнем, что рисунок лишь поясняет принцип работы устройства, и на самом деле букве **Б** может соответствовать другая пара цифр). Начальное взаимное расположение шестерёнок неизвестно. Найдите по известным выписанным парам цифр

51 11 22 12 11 46 46 35 11 22 44 34 56 11 46 34 11  
24 35 22 35 13 35 33 11

какое сообщение было зашифровано (пробелы в тексте сохранены).

2. Милла и Стелла разговаривают по телефону и хотят выбрать секретное число так, чтобы оно осталось неизвестным постороннему, возможно подслушивающему разговор. Для этого Милла подбирает натуральное число  $a \leq 256$  такое, что числа  $r_{257}(a^i)$  – различны при всех  $1 \leq i \leq 256$  и  $r_{257}(a^{256}) = 1$ , где  $r_{257}(t)$  – остаток от деления числа  $t$  на 257. Затем Милла загадывает натуральное число  $x \leq 256$ , а Стелла – натуральное число  $y \leq 256$ . После этого Милла сообщает числа  $a$  и  $r_{257}(a^x)$  Стелле, а Стелла ей – число  $r_{257}(a^y)$ . Теперь они обе вычисляют их секретное число  $r_{257}(a^{xy})$ . Найдите его, если известно, что  $a=5$ ,  $r_{257}(a^x)=9$ ,  $r_{257}(a^y)=252$ .

3. Для шифрования SMS-сообщений использовался следующий способ. Первоначально каждый пробел в исходном сообщении заменялся некоторым трёхбуквенным словом. Затем полученная цепочка букв набиралась на клавиатуре с использованием интеллектуального ввода (по типу T9). При этом при вводе каждой буквы осуществлялась лишь однократное нажатие соответствующей клавиши (рис.2), а программа интеллектуального ввода выбирала слово из словаря по следующему принципу: 1-я буква слова выбиралась с 1-й нажатой клавиши, 2-я – со второй и т. д. Полученные таким образом осмысленные слова разделялись запятыми и передавались. Найдите исходное сообщение, соответствующее написанному на экране (рис.2).

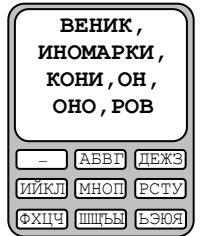


Рис. 2

4. Когда число городов в Криптоландии достигло  $4^5$ , власти решили провести территориальную реформу, создав 4 провинции по  $4^4$  городов в каждой. В качестве названий городам планировалось присвоить различные обозначения  $(a_1, \dots, a_5)$  – наборы из 5-и целых чисел, в которых  $a_i$  принимают значения от 0 до 3. При этом обозначения каждой пары городов из одной провинции должны были отличаться не менее чем в двух позициях. Укажите какой-либо способ построения такой системы названий.

5. Для шифрования передаваемых сообщений Катя и Юра используют следующий способ. Юра заранее выбрал набор коэффициентов (3, 6, 11, 22), натуральное число  $u$  и сообщил их Кате. Для шифрования сообщения  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , состоящего из нулей и единиц, Катя вычисляет сумму  $S = 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 22x_4$ , а затем находит остаток  $S'$  от деления произведения  $Su$  на 43 и отправляет  $S'$  Юре. Помогите Юре расшифровать сообщение  $S'=13$ , то есть найти соответствующую ему строку  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , если известно, что остаток от деления числа  $9u$  на 43 равен 1.

6. В треугольнике ABC известно:  $BC=3$ ,  $AC=3$ , угол ACB равен  $90^\circ$ . Точки M и K удовлетворяют условиям:  $AM : MC = 2:1$ ,  $BK : CK = 2:1$ . Найдите максимально возможное расстояние между точками M и K.